

Tesis de Licenciatura en Educación Matemática, Facultad de Ciencias Exactas. UNICEN.
Argentina

Organizaciones matemáticas propuestas para el nivel secundario relativas al Teorema de Pitágoras: una descripción desde la teoría antropológica de lo didáctico

Autor: Yesica Eugenia Torres

Directora: Dra. Verónica Parra (UNICEN-CONICET Argentina)

Jurado

Dra. Diana Patricia Salgado (UNS Argentina)

Dra. Ana Corica (UNICEN-CONICET Argentina)

Dra. Verónica Parra (UNICEN-CONICET Argentina)

Fecha defensa: 19 de agosto de 2020

El trabajo que se presenta aquí nace del estudio de las dificultades que surgen en la enseñanza y aprendizaje del teorema de Pitágoras en la educación secundaria (Vargas-Gamboa, Araya, 2013; Duque Gómez, 2013; Echavarría-Bermúdez, 2011; Casás, 2010). Se trata de una investigación centrada en identificar y describir los componentes (tareas, técnicas, tecnologías y teorías) de las organizaciones matemáticas (OM) relativas al teorema de Pitágoras, reconstruidas a partir de un conjunto de 34 libros de texto del ciclo básico (primero, segundo y tercer año escolar, según la clasificación en Argentina) destinados al nivel secundario. Se intenta concluir sobre el nivel de estas OM, tratando de delimitar si se tratan de OM puntuales, locales, regionales o globales y sobre su grado de completitud. Resulta importante desarrollar este análisis no sólo para describir estas praxeologías, sino también porque muchos docentes utilizan los libros como uno de los recursos principales, y en algunas ocasiones, el único, para el desarrollo de sus clases. En este sentido, se pretende que este trabajo permita al menos, propiciar una reflexión sobre las praxeologías disponibles en los libros de texto, en tanto constituyen un recurso para los profesores. En relación a este objetivo, y a la luz del marco teórico adoptado, la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 1999, 2013, 2017) se formulan las siguientes preguntas de la investigación

- ¿Qué características, en términos de componentes, tienen las organizaciones matemáticas (OM) propuestas para enseñar entorno al teorema de Pitágoras, en un conjunto de 34 libros de texto destinados al nivel secundario argentino?
- ¿Cómo se clasifican estas OM, en términos de puntuales, locales, regionales o globales?
- ¿Cuál es el grado de completitud de esas OM?

La selección de los 34 libros de texto (19 corresponden a segundo año, 9, al primer año y 6, a tercer año) se

fundamenta en la accesibilidad a los mismos por parte de la investigadora. Los libros, editados a partir del año 1975 hasta el 2016 y producidos por variados grupos editoriales, se recopilaron de la Biblioteca de los establecimientos de la ciudad de Bragado (Buenos Aires) donde la investigadora desempeña sus funciones docentes. También algunos de estos libros fueron aportados por colegas desde sus bibliotecas personales.

Como instrumento de respuestas a la primera pregunta se construyeron dos tablas. La primera de ellas (Tabla 1) pretende describir de forma amplia cada libro, por ejemplo, nombre de los autores, año escolar al cual está destinado, editorial, etc. La segunda tabla (Tabla 2) pretende identificar y detallar la OM allí propuesta a partir de la identificación de cada uno de sus componentes.

En la primera columna de la tabla 1 se colocó el nombre del libro; en la segunda columna, su editorial; en la tercera columna, el nombre del(los) autor(es); en la cuarta columna, el año de edición del libro; en la quinta columna se tuvo en cuenta el año escolar al cual estaba destinado el libro de acuerdo a lo explicitado en él; en la sexta columna se hizo referencia al nombre del capítulo en el cual cada libro incorporaba el teorema de Pitágoras y en la séptima columna, se indicó los capítulos anteriores y posteriores en el cual se incorporaba el Teorema de Pitágoras.

Nombre del libro	Editorial	Autor(es)	Año de edición	Año escolar	Capítulo del Teorema de Pitágoras	Entre qué capítulos
------------------	-----------	-----------	----------------	-------------	-----------------------------------	---------------------

Tabla 1: Descripción general de los libros

En la tabla 2, en la primera columna se hizo referencia al rótulo del libro, con una M_i , con i desde 1 hasta 34; en la

segunda columna se colocó la(s) tarea(s) propuesta(s) en el libro tal como se explicitaban en el mismo; en la tercera columna, las técnicas propuestas para resolver esa tarea; en la cuarta y quinta columna, las tecnologías y teorías posibles de identificar para cada técnica y tarea, respectivamente.

Libro (M _i)	Tarea (t)	Técnicas (τ)	Tecnología (θ)	Teoría (Θ)
-------------------------	-----------	--------------	----------------	------------

Tabla 2: OM según sus componentes

A continuación, se precisa qué fue considerado como “tarea”, “técnica”, “tecnología” y “teoría”.

- Tareas (t): ejercicios/actividades/problemas que se abordan o estudian y proponen en cada libro, ya sean resueltos o no, y se rotuló con la letra t.
- Técnicas (τ): maneras de abordar ese problema y se rotuló con la letra τ.
- Tecnología (θ): justificaciones/explicaciones de las técnicas. Se rotuló con la letra θ.
- Teoría (Θ): justificaciones/explicaciones de las tecnologías. Se rotuló con la letra Θ.

Para responder a la segunda pregunta de investigación se tienen en cuenta los 4 niveles de praxeologías formulados por Chevallard (1999) y Bosch, Espinoza, Gascón (2003): puntuales, locales, regionales y globales.

La Tabla 2 permitió detallar cada tarea, explicitada en cada uno de los libros, así como las técnicas, tecnologías y teorías. Luego, esas tareas se agruparon en tipos de tareas. El criterio para este agrupamiento fue identificar aquellas tareas que se resuelven con una misma técnica. Luego, los géneros de tareas.

Para responder a la última pregunta de investigación se utilizaron los indicadores del grado de completitud de una OM local (OML) formulados por Fonseca (2004, Fonseca, Bosch y Gascón, 2010). Estos autores proponen dos tipos de conjuntos de indicadores del grado de completitud. Uno de ellos, el utilizado en este trabajo, corresponde a la OM ya construida, haciendo abstracción del proceso de estudio.

Se generaron descriptores para cada uno de esos indicadores a partir de la formulación de Fonseca (2004):

- OML1₁: Los tipos de tareas y técnicas aparecen integrados.
- OML1₂: Las tareas matemáticas relativas al cuestionamiento tecnológico están presentes
- OML2₁: Para cada tipo de tareas existen diferentes técnicas.
- OML2₂: En la propia OM existen criterios para elegir la técnica más adecuada.
- OML3₁: La OM local contiene diversos objetos ostensivos (gráficos, verbales, gestuales, etc.) para representar un mismo objeto matemático.
- OML3₂: Los objetos matemáticos son independientes de los objetos (ostensivos) que se utilizan para representarlos.
- OML4₁: Las tareas y las técnicas son relativamente “flexibles”.
- OML4₂: Las tareas y las técnicas puedan ser “invertidas” (no de manera única) para dar origen a nuevas tareas y nuevas técnicas.
- OML5₁: La OM contiene tareas matemáticas que permiten

interpretar el funcionamiento de las técnicas.

OML5₂: La OM contiene tareas matemáticas que permiten interpretar el resultado de aplicar las técnicas.

OML6₁: Las tareas matemáticas abiertas están presentes (esto es, tareas matemáticas cuyos “datos” e “incógnitas” no estén completamente determinados de antemano).

OML6₂: La OM contiene tipos de tareas que requieren un proceso de modelación matemática.

OML7₁: El discurso tecnológico-teórico de la OM incide efectivamente sobre ésta.

OML7₂: El discurso tecnológico-teórico de la OM permite construir técnicas matemáticas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas y flexibilizar la práctica matemática.

Se generó la tabla 3 para identificar cual o cuales de estos descriptores podían detectarse (o no) en cada OM. Se consideran en las primeras columnas, cada tipo de tarea, las técnicas y tecnologías/teorías propuestas en cada caso. Luego, los descriptores, donde se colocan cruces para determinar cuál o cuáles de ellos están presentes.

T	τ	θ/Θ	OM L1		OM L2		OM L3		OM L4		OM L5		OM L6		OM L7	
			OML1 ₁	OML1 ₂	OML2 ₁	OML2 ₂	OML3 ₁	OML3 ₂	OML4 ₁	OML4 ₂	OML5 ₁	OML5 ₂	OML6 ₁	OML6 ₂	OML7 ₁	OML7 ₂

Tabla 3: Identificación de los descriptores

A partir de la información de la tabla 1, se obtuvo que, en los libros de primer año, el capítulo del teorema de Pitágoras se propone después de la unidad de construcciones geométricas y antes de la unidad de números enteros; en los libros destinados a segundo año, después de la unidad de cuadriláteros y antes de la unidad de probabilidad y estadística, y en los de tercer año antes de la unidad de sistemas de ecuaciones y después de la unidad de movimientos.

A partir de la información de la tabla 2, del total de las 201 tareas identificadas, rotuladas y clasificadas, se pudieron obtener 11 tipos de tareas diferentes y a su vez, agrupar en 5 géneros de las tareas diferentes. El número de tareas identificada en cada tipo, se coloca entre paréntesis.

- T_{1.1}: Calcular el valor de la hipotenusa, diagonal, lado/s, metros (122).
- T_{1.2}: Calcular el valor del área, perímetro, apotema, altura, superficie lateral, base, alto, distancia, metros (54).
- T_{2.1}: Identificar los triángulos y la posibilidad de formar un triángulo (2).
- T_{2.2}: Identificar el valor de los lados (1).
- T_{3.1}: Determinar si se trata de un triángulo y la veracidad o falsedad de la situación (2).
- T_{3.2}: Determinar si se cumplen las condiciones, si se trata de un triángulo, la figura obtenida y si es posible la construcción del triángulo (5).
- T_{3.3}: Determinar las ternas pitagóricas y a que lados corresponden los datos (2).
- T_{4.1}: Comprobar la relación pitagórica, las ternas, si los triángulos son rectángulos y el teorema (4).

T_{4.2}: Comprobar el valor del lado y las ternas pitagóricas (4).
T_{5.1}: Construir triángulos rectángulos y ternas pitagóricas (4).
T_{5.2}: Construir un cuadrado (4).

A su vez, estos 11 tipos de tareas se distribuyen de la siguiente manera en los géneros de tareas:

G₁: Calcular (el 88% del total).
G₂: Identificar (alrededor del 2% de las tareas).
G₃: Determinar (equivalente al 4%).
G₄: Comprobar (aproximadamente el 4%).
G₅: Construir (alrededor del 2%).

Con respecto a la tecnología, es importante destacar que este tipo de componentes han sido inferidos ya que no se explicitan en los textos considerados. En cuanto a la teoría, los libros de texto no proponen ninguna alusión que pueda ser considerada como tal.

Se concluye entonces, en una preponderancia del Género de tareas relativo a “Calcular” y del tipo de tareas T_{1.1}. Esto da indicios de una OM con una amplia preponderancia del bloque práctico-técnico por sobre el bloque tecnológico-teórico, que casi podría decirse está completamente ausente, salvo por algunas inferencias que es posible hacer. Se concluye además entonces que las OM pueden considerarse “locales”. Si bien, como se indicó previamente, no se explicitan elementos tecnológicos-teóricos, sí es posible inferir diversas justificaciones de técnicas a partir de algunas tareas y entonces, podría considerarse la existencia de al menos, “un embrión de tecnología”, tal como lo propone Chevallard (1999).

Respecto al grado de completitud, los descriptores que se identifican son 5: OML₁, OML₂, OML₃, OML₅ y OML₆. Conviene aclarar que esta identificación no se ha considerado en sentido fuerte. Es decir, se ha considerado presente tal o cual indicador si existe algún indicio de el mismo. Los demás descriptores no fueron identificados. Se concluye entonces que estas OM tienen un bajo grado de completitud.

REFERENCIAS

Casás, N. (2010). Algunas demostraciones geométricas de la irracionalidad de $\sqrt{2}$. *Suma*, 63, 17-20.
Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266.
Chevallard, Y. (2013). *La matemática en la escuela: Por una revolución epistemológica y didáctica*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*. 20(1), 159-169.
Duque Gómez, C. (2013). Pitágoras ayuda al fiscal. *Números* 82, 157-171.
Echavarría, C y Bermúdez, C. (2011). *El teorema de Pitágoras en la escuela*. En García, Gloria (Ed.), *Memorias del 12° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 560-564). Armenia: Gaia.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. Tesis doctoral, Universidad de Vigo.

Fonseca, C.; Bosch, M. y Gascón, J. (2010). El momento del trabajo de la técnica en la competición de organizaciones matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios. *Educación Matemática*, 22(2), 5-35.

Vargas-Vargas, G. y Gamboa-Araya, R. (2013). La enseñanza del Teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del GeoGebra, según el modelo de Van Hiele. *Uniciencia*, 27(1), 95-118.